vwlfibel

Theorie der Marktwirtschaft

von

Axel Hillmann

Textauszug

Achtzehnte Auflage

vwlfibeln

Einführung in die Wirtschaftswissenschaft
Theorie der Marktwirtschaft
Makroökonomie
Marktversagen
Allokationstheorie
Öffentliche Ausgaben

vwlklausurlösungen

Markt und Staat
Preisbildung auf unvollkommenen Märkten
Internationale Finanzwissenschaft

vwlübungen

Makroökonomie
Marktversagen
Internationale Finanzwissenschaft
Öffentliche Ausgaben

Repetitorium Axel Hillmann

Inhaltsverzeichnis

Seite

Textauszug

1	**Einführung**	**1**
2	**Haushaltstheorie**	**5**
	2.1 Einführung	5
	2.2 Güternachfrage	7
	2.2.1 Präferenzordnung	8
	2.2.2 Nutzenfunktion und Indifferenzkurve	12
	2.2.3 Budgetrestriktion und Budgetgerade	18
	2.2.4 Nutzenmaximum (Haushaltsgleichgewicht)	21
	2.2.5 Nachfragefunktionen	26
	2.2.5.1 Einkommens– bzw. Budgetänderungen	27
	2.2.5.2 Preisänderungen für das betrachtete Gut	30
	2.2.5.3 Preisänderungen für ein anderes Gut	32
	2.2.5.4 Substitutions– und Einkommenseffekt	34
	2.3 Arbeitsangebot	39
	2.4 Intertemporale Nutzenmaximierung	44
	2.5 Entscheidungen unter Unsicherheit	49
	2.5.1 Entscheidungen unter Risiko	49
	2.5.2 Entscheidungen unter Ungewissheit	58
	2.5.3 Ermittlung der Erwartungsnutzenfunktion	59
	2.6 Lösungen zu den Übungsaufgaben	62
	2.7 Lösungen zu den Klausuraufgaben	66
3	**Theorie der Firma**	**107**
	3.1 Einführung	117
	3.2 Kurzfristige Analyse	112
	3.2.1 Partielle Faktorvariation	112
	3.2.2 Kostenfunktionen	116
	3.2.3 Angebots– und Nachfragefunktionen	118
	3.3 Langfristige Analyse	129
	3.3.1 Substitutionale Faktorvariation	129
	3.3.2 Proportionale oder totale Faktorvariation	141
	3.3.3 Kostenfunktionen	147
	3.3.4 Angebots– und Nachfragefunktionen	155
	3.4 Lösungen zu den Übungsaufgaben	161
	3.5 Lösungen zu den Klausuraufgaben	165
4	**Vollständige Konkurrenz**	**197**
	4.1 Einführung	197
	4.2 Gütermarktnachfrage	199
	4.3 Gütermarktangebot	202
	4.4 Gütermarktgleichgewicht	208
	4.4.1 Statische Analyse –Preismechanismus	209
	4.4.2 Komparativ–statische Analyse	211
	4.4.3 Cobweb–Theorem	217

4.4.4 Markteingriff des Staates 219

4.5 Faktormarkt 223

4.5.1 Faktormarktangebot 223

4.5.2 Faktormarktnachfrage 225

4.6 Rente 229

4.7 Lösungen zu den Übungsaufgaben 238

4.8 Lösungen zu den Klausuraufgaben 242

5 Unvollständige Konkurrenz 275

5.1 Monopol: Einführung 275

5.2 Monopolgleichgewicht 278

5.3 Kartell 291

5.4 Monopolistische Konkurrenz 294

5.5 Lösungen zu den Übungsaufgaben 296

5.6 Lösungen zu den Klausuraufgaben 299

6 Mathehilfen für die Volkswirtschaftslehre 339

6.1 Ableitungen 339

6.2 Totales Differenzieren 341

6.3 Lagrange–Technik 342

6.4 Lösen einer quadratischen Gleichung 343

6.5 Elastizitäten 344

6.6 Rechnen mit Exponenten 347

7 Glossar 348

8 Literaturverzeichnis 363

Abbildungsverzeichnis

Seite

Haushaltstheorie

Abb. 1: Strenge Konvexität 9
Abb. 2: Nutzenkurve 1 12
Abb. 3: Nutzenkurve 2 13
Abb. 4: Indifferenzkurve 14
Abb. 5: Grenzrate der Substitution 16
Abb. 6: Substitutionselastizität 17
Abb. 7: Budgetgerade 19
Abb. 8: Budgetgerade nach Budgeterhöhung 20
Abb. 9: Budgetgerade nach Preiserhöhung 20
Abb. 10: Budgetgerade nach Preissenkung 20
Abb. 11: Nutzenmaximum 21
Abb. 12: Nachfragekurve 28
Abb. 13: Engelkurve 29
Abb. 14: Preis–Konsumkurve 31
Abb. 15: Kreuzpreis–Konsumkurve 33
Abb. 16: Substitutions– und Einkommenseffekt 35
Abb. 17: Giffen–Gut 37
Abb. 18: Slutsky–kompensierte Nachfrage 38
Abb. 19: Lohnerhöhung 41
Abb. 20: Intertemporale Budgetgeraden 46
Abb. 21: Nutzenfunktion bei Risikoscheu 55
Abb. 22: Nutzenfunktion bei Risikofreude 56
Abb. 23: Nutzenfunktion bei Risikoneutralität 57

Theorie der Firma

Abb. 24: Ertrags- und Grenzertragskurven 114
Abb. 25: Ertrags-, Grenzertrags- und Durchschnittsertragskurven 115
Abb. 26: Ertrags– und kurzfristige Kostenkurven einer neoklassischen Produktionsfunktion 120
Abb. 27: Ertrags– und kurzfristige Kostenkurven einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion 121
Abb. 28: Ertrags– und kurzfristige Kostenkurven einer linear–limitationalen Produktionsfunktion 122
Abb. 29: Ertrags– und kurzfristige Kostenkurven einer linear–substitutionalen Produktionsfunktion 123
Abb. 30: Angebotskurven einer neoklassischen Produktionsfunktion 127
Abb. 31: Isoquanten 131
Abb. 32: Gesetz von der abnehmenden Grenzrate der technischen Substitution 132
Abb. 33: Isokline 133
Abb. 34: Kostenminimum 135
Abb. 35: Expansionspfad 137
Abb. 36: Isoquante der Sato–Funktion 139

Abb. 37: Isoquante einer linearen Funktion 140
Abb. 38: Isoquante der Leontief–Funktion 140
Abb. 39: Niveau–Ertragskurven 141
Abb. 40: Niveau–Ertragskurve bei zunächst steigenden, dann sinkenden Skalenerträgen 146
Abb. 41: Niveau–Ertrags– und langfristige Kostenkurven bei konstanten Skalenerträgen 148
Abb. 42: Niveau–Ertrags– und langfristige Kostenkurven bei sinkenden Skalenerträgen 149
Abb. 43: Niveau–Ertrags– und langfristige Kostenkurven bei steigenden Skalenerträgen 150
Abb. 44: Niveau–Ertrags– und langfristige Kostenkurven bei wechselnden Skalenerträgen 151
Abb. 45: Kurzfristige und langfristige Kosten 152
Abb. 46: Kurzfristige und langfristige Kostenfunktionen (neoklassisch) 153
Abb. 47: Kurzfristige und langfristige Kostenfunktionen (linear–limitational) 154
Abb. 48: Faktorpreiserhöhung – Substitutions– und Mengeneffekteffekt 159

Preisbildung bei vollständiger Konkurrenz

Abb. 49: Vollkommen unelastische Nachfrage 200
Abb. 50: Vollkommen elastische Nachfrage 200
Abb. 51: Horizontale Addition von Nachfragekurven 202
Abb. 52: Angebotskurven in der sehr kurzen Frist 203
Abb. 53: Marktungleichgewicht 210
Abb. 54: Senkung der Produktionskosten 212
Abb. 55: Nachfrageerhöhung bei vollkommen unelastischem Angebot 213
Abb. 56: Nachfragesenkung bei vollkommen elastischem Angebot 214
Abb. 57: Kostensenkung bei vollkommen unelastischer Nachfrage 214
Abb. 58: Kostenerhöhung bei vollkommen elastischer Nachfrage 214
Abb. 59: Walrasianische Stabilitätsanalyse 215
Abb. 60: Instabiles Cobweb–Gleichgewicht 217
Abb. 61: Stabiles Cobweb–Gleichgewicht 218
Abb. 62: Wirkung einer Verbrauchsteuer 1 219
Abb. 63: Wirkung einer Verbrauchsteuer 2 220
Abb. 64: Verbrauchsteuer bei vollkommen elastischen Angebot 221
Abb. 65: Verbrauchsteuer bei vollkommen unelastischer Nachfrage 221
Abb. 66: Preisobergrenze 222
Abb. 67: Preisuntergrenze 222
Abb. 68: Kurzfristige Faktornachfragekurve bei konstantem Güterpreis 225
Abb. 69: Kurzfristige Faktornachfragekurve bei variablem Güterpreis 225
Abb. 70: Marginale und maximale Zahlungsbereitschaft 228
Abb. 71: Konsumentenrente und Produzentenrente 229
Abb. 72: Wohlfahrtswirkung einer Preisobergrenze 232
Abb. 73: Wohlfahrtswirkung einer Preisuntergrenze 233
Abb. 74: Wohlfahrtswirkung einer Verbrauchsteuer 233
Abb. 75: Wohlfahrtswirkung einer Produktionskontingentierung 234
Abb. 76: Wohlfahrtswirkung von Stützungskäufen 235
Abb. 77: Wohlfahrtswirkung einer Weltmarktöffnung 236
Abb. 78: Wohlfahrtswirkung einer Zollerhebung 237

Preisbildung bei unvollständiger Konkurrenz

Abb. 79: Erlös und Grenzerlös im Monopol 277
Abb. 80: Monopolgleichgewicht 1 280
Abb. 81: Monopolgleichgewicht 2 280
Abb. 82: Als–Ob–Konkurrenz–Fall 1 282
Abb. 83: Als–Ob–Konkurrenz–Fall 2 282
Abb. 84: Exogene Nachfrageerhöhung im Monopol 283
Abb. 85: Erhöhung der Produktionskosten im Monopol 285
Abb. 86: Wirkung einer Verbrauchsteuer 285
Abb. 87: Nachfrageerhöhung im natürlichen Monopol 287
Abb. 88: Kostensenkung im natürlichen Monopol 287
Abb. 89: Kartellgleichgewicht 292
Abb. 90: Monopolistische Konkurrenz 294

Symbolverzeichnis

h	Homogenitätsgrad
l	Lohnsatz
m	Monopolgrad
r	Zinssatz
t	Steuersatz
w	Wahrscheinlichkeit
x	(individuelle) Angebots– oder Nachfragemenge für das Gut X
y	(individuelle) Angebots– oder Nachfragemenge für das Gut Y
z	Zeitpräferenzrate, Zollsatz
A	Index für *Angebot*
B	(Konsum–) Budget eines Haushaltes
C	Konsumausgaben (*Haushaltstheorie*), Kapital (*Theorie der Firma*)
E	Einkommen (nur *Haushaltstheorie*), Erlös
F	Freizeit
G	Gewinn
K	Kosten
L	Arbeit
N	Index für *Nachfrage*
P	Güterpreis
Q	(individuelle) Produktionsmenge
S	Ersparnis
T	Gesamtzeit
U	Nutzen
V	Barwert des Einkommens
X	Gütermenge
ε	Elastizität
λ	Lagrangeparameter
μ	Niveau–Faktor

Die Bedeutung weiterer Parameter und Indizes ergibt sich aus dem Zusammenhang.

2 Haushaltstheorie

Textauszug

2.1 Einführung

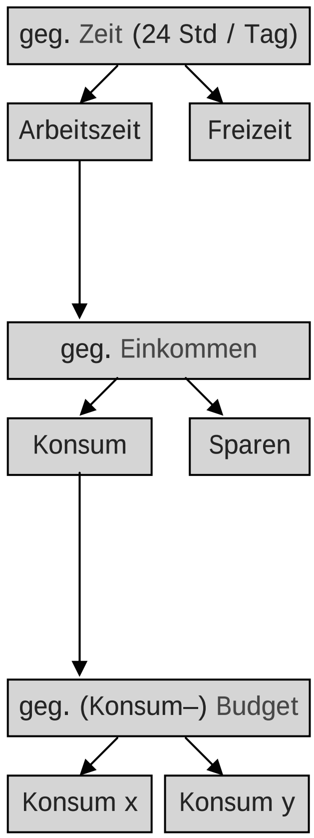
Die mikroökonomische Haushaltstheorie beschäftigt sich mit den wirtschaftlichen Entscheidungen privater Haushalte. Der Endzweck allen wirtschaftlichen Handelns – die Befriedigung unserer (materiellen) Bedürfnisse – vollzieht sich im Haushalt. Abhängig von ihren individuellen Vorlieben (Präferenzen) **arbeiten**, **sparen** und **konsumieren** die Haushalte, um diese Bedürfnisse zu befriedigen. Dabei nimmt man an, ein Haushalt verhalte sich bei seinen (ökonomischen) Entscheidungen derart, als ob er eine **Präferenzordnung** (Rangfolge der Wünschbarkeit verschiedener Alternativen) besitze.

Ein Haushalt (ökonomische Entscheidungseinheit, Marktakteur)

- fragt Güter nach.
- bietet Arbeit an.
- bietet Kapital an.
- produziert nicht für Märkte.

Diese Präferenzordnung lässt sich, um eine formale Analyse zu ermöglichen, unter bestimmten Voraussetzungen durch eine mathematische Funktion, die sog. **Nutzenfunktion** abbilden. Ferner wird angenommen, dass der Haushalt seine Bedürfnisbefriedigung, mithin seinen (im Allgemeinen) durch den Güterverbrauch gestifteten Nutzen zu maximieren trachtet. Bezogen auf diesen grundsätzlichen **Nutzenmaximierungskalkül** steht der Haushalt vor den folgenden Entscheidungssituationen:

Annahme: Ein Haushalt ist Nutzenmaximierer.



Arbeitsangebot

Der Haushalt entscheidet über die Aufteilung seiner ihm pro Periode zur Verfügung stehenden **Zeit** auf Arbeitszeit und Freizeit. Dieses Verteilungsproblem wird mit Hilfe einer Nutzenfunktion abgebildet, in der die Freizeit Argument ist. Ziel dieser Analyse ist die Ableitung einer individuellen **Arbeitsangebotsfunktion**, die den Zusammenhang zwischen Angebot und Lohnsatz beschreibt.

Güternachfrage für mehrere Perioden / Kapitalangebot

Über die Arbeitsangebotsentscheidung ist bei gegebenem Lohnsatz das (Arbeits–) **Einkommen** für eine Periode gegeben. Der Haushalt entscheidet über die Aufteilung seines Einkommens auf Konsumieren und Nicht–Konsumieren (Sparen). Dieses Problem des Güterverbrauchs im Zeitablauf wird mit Hilfe einer **intertemporalen Nutzenfunktion** abgebildet, in der die Verbrauchsmengen bzw. Konsumsummen für zwei (oder mehrere) Perioden Argumente sind.

Güternachfrage für eine Periode

Über die Konsum– bzw. Sparentscheidung ist das (Konsum–) **Budget** bzw. das für Konsumzwecke verfügbare Einkommen für die betrachtete Periode gegeben. Der Haushalt entscheidet über die Aufteilung seines Konsumbudgets auf verschiedene Güter. Dieses Verteilungsproblem wird mit Hilfe einer Nutzenfunktion abgebildet, in der die verschiedenen Güter (x und y) Argumente sind. Ziel dieser Analyse ist die Ableitung individueller **Güternachfragefunktionen**, die den Zusammenhang zwischen Nachfrage und Güterpreisen bzw. Konsumbudget beschreiben.

Arbeit und Kapital gehen mit ihrer Leistungsabgabe in die Produktion ein.

Über das verfügbare Einkommen sind Angebots– und Nachfragemengen des Haushalt stets wechselseitig voneinander abhängig. Bei allen Entscheidungen richten sich – abhängig von den gegebenen Preisen für Güter und Produktionsfaktoren (Arbeit und Kapital) – die Mengendisposition des Haushaltes danach, welche Entscheidungsalternative ihm den größten Nutzen stiftet.

Rationalverhalten

widerspruchfreies (konsistentes) Entscheiden und Handeln

Annahme: Haushalt ist Mengenanpasser bzw. Preisnehmer:

Preise sind gegeben.

Die Haushaltstheorie unterstellt **rationales Verhalten** des repräsentativen Haushalts.[1] Außerdem, so eine weitere Annahme, verfügen die Haushalte über alle entscheidungsrelevanten Informationen, sie entscheiden *unter Sicherheit*. Haushalte schließlich sind – in dieser Einführung – stets **Mengenanpasser**, d. h. sie orientieren sich mit ihren nachgefragten (Güter–) und angebotenen (Faktor–) Mengen an den Marktgegebenheiten (vor allem an den für einen einzelnen Akteur gegebenen Preisen), ihr individuelles Nachfrage– bzw. Angebotsverhalten hat – wie auf einem Markt unter vollständiger Konkurrenz – mithin keinen Einfluss auf Gleichgewichtsmengen und Gleichgewichtspreise auf jeglichen Güter– bzw. Faktormärkten.

Die Nutzenfunktion enthält in der Regel nur zwei Argumente.

Nachfolgend wird zunächst das Konzept der Nutzenmaximierung am Beispiel des Nachfrageverhaltens eines (repräsentativen) Haushalts innerhalb einer Periode sehr ausführlich beschrieben, anschließend am Beispiel des Arbeitsangebotsverhaltens und bezüglich der intertemporalen Konsumentscheidung kürzer zusammengefasst, wobei wie üblich (schon aus Gründen der grafischen Darstellbarkeit) stets auf den **Zwei–Güter–Fall** abgestellt ist:

- Entscheidung über den Konsum einzelner Güter bei gegebenen Konsumbudget – Abschnitt 2.2 (**Güternachfrage**)
- Entscheidung über Arbeitszeit und Freizeit bei gegebener Gesamtzeit – Abschnitt 2.3 (**Arbeitsangebot**)
- Entscheidung über den Konsum im Zeitablauf bei gegebenem verfügbarem Einkommen – Abschnitt 2.4 (**Intertemporale Konsumentscheidung**)

---

[1] Im Modul „Theorie der Marktwirtschaft“ der FernUniversität Hagen wird zudem der Begriff *substanzielle Rationalität* (in Abgrenzung zur *instrumentellen Rationalität*) verwendet, weil das Rationalitätsprinzip das Entscheidungsziel selbst (Nutzenmaximierung!) einschließt. Wenn überdies die zur Entscheidung notwendige Informationsbeschaffung keine Kosten verursacht, so eine weitere vereinfachende Annahme, ist *perfekte Rationalität* gegeben.

2.2 Güternachfrage

Im Folgenden wird hergeleitet, wie sich ein einzelner Haushalt idealtypisch als Nachfrager auf Gütermärkten verhält. Formales Ziel dieser Analyse ist die Bestimmung von individuellen **Nachfragefunktionen** bzw. **Nachfragekurven** für jedes konsumierte, auf Märkten nachzufragende Gut (Ware oder Dienstleistung).[2] Dabei wird stets unterstellt, der Haushalt beabsichtige, unter Ausschöpfung seines für Konsumzwecke vorgesehenen Budgets und unter Berücksichtigung der von den Märkten vorgegebenen Preise seinen aus dem Konsum der Güter gestifteten Nutzen zu maximieren.

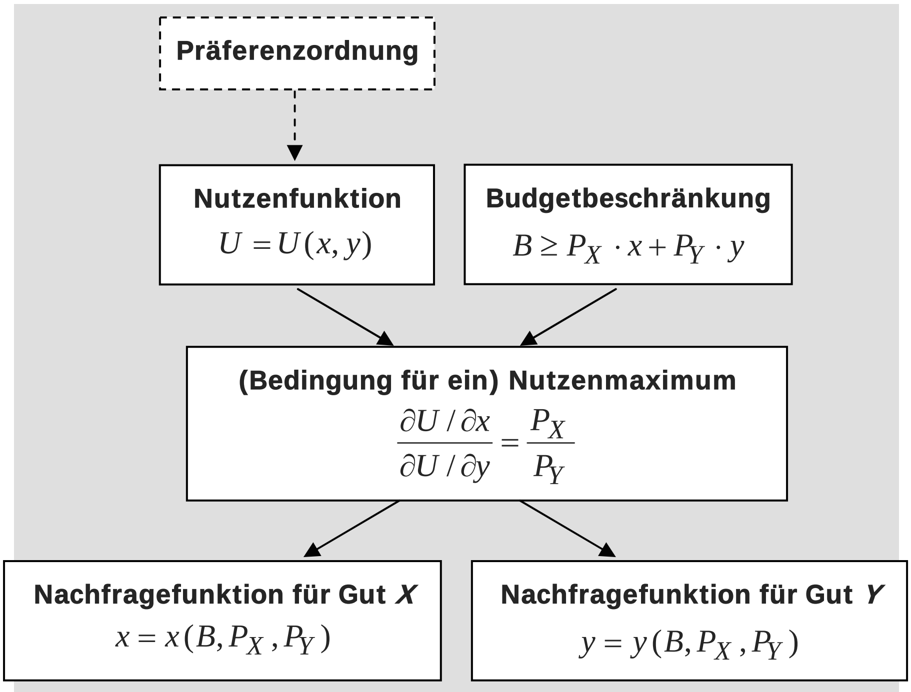
Zur Erinnerung:

Der Haushalt ist Nutzenmaximierer.

Anders formuliert: Um die Nachfragefunktionen eines Haushalts herleiten zu können, muss man zunächst die (allgemein oder spezifisch formulierte) **Bedingung für ein Nutzenmaximum** ermitteln. Für die Ermittlung dieser Nutzenmaximierungsbedingung muss man die Präferenzen bzw. die Nutzenfunktion des Haushalts sowie sein Budget bzw. seine Budgetrestriktion kennen. Hier ein Schema für die nachfolgende Analyse:

Von der Nutzenfunktion kann man auf die Nachfragefunktion schließen, aber niemals umgekehrt.

Bitte merken Sie sich:



Mit Ausnahme des folgenden Kapitels zur Präferenzordnung sollten Sie alle Abschnitte chronologisch bearbeiten. Eine Nutzenfunktion und ihre verschiedenen Aspekte werden Sie auch ohne Kenntnis der Eigenschaften der Präferenzordnung verstehen.

Abschnitt 2.2.1 können Sie später bearbeiten.

---

[2] Die Nachfrage nach freien Gütern wie Luft, Sand in der Sahara etc. ist also nicht von Interesse.

2.2.1 Präferenzordnung

Ein Güterbündel kann auch aus nur einem Gut bestehen.

Eine Präferenzordnung ist die subjektive Rangfolge von Entscheidungsalternativen nach ihrer Wünschbarkeit. Hier geht es um alternative Güterbündel, also Kombinationen aus den Verbrauchsmengen verschiedener Güter.

Es gibt starke und schwache Präferenzordnungen sowie Indifferenzordnungen.

Formal ist eine Präferenzordnung ein System von Relationen mit der Dominanzbeziehung „$\succ$“ (*besser als*) oder alternativ „$\succsim$“ (*nicht schlechter als*) sowie der Indifferenzbeziehung „~“ (*gleich gut wie*). Systeme, die ausschließlich Bewertungen mit $\succ$ bzw. $\prec$ enthalten, nennt man *starke Präferenzordnungen*, solche, die lediglich ~ aufweisen, *Indifferenzordnungen*. Rangfolgen, die Vergleiche sowohl für $\succ$ als auch für ~, mithin $\succsim$ enthalten, nennt man *schwache Präferenzordnungen*.

Axiom: Grundannahme ohne Beweis

Axiome des Rationalverhaltens bzw. grundlegende Eigenschaften der Präferenzordnung eines (jeden) Haushalts sind:

A Vollständigkeit

Der Haushalt ist in der Lage, alle zur Entscheidung stehenden $y-x-$Güterkombinationen (in einem $y-x-$Güterdiagramm) zu bewerten und miteinander zu vergleichen. Es gilt für beliebige Güterbündel $A=(x^A, y^A)$ und $B=(x^B, y^B)$:

Präferenzordnungen, die nur „~“ oder nur „$\succ$“ enthalten, sind nicht vollständig.

entweder $A \succ B$ (Güterbündel *A* wird höher bewertet als *B*.)

oder $A \prec B$ (*A* wird niedriger bewertet als *B*.)

oder $A \sim B$ (*A* und *B* werden gleich bewertet.)

B Transitivität

Die Rangfolge der Güterbündel muss widerspruchsfrei sein. Wenn Güterbündel *A* höher eingeschätzt wird als *B*, und dieses höher als Güterbündel *C*, dann muss *A* auch höher eingeschätzt werden als *C*. Für beliebige Güterbündel *A*, *B* und *C* gilt:

Wenn $A \succ B$ und $B \succ C$, dann $A \succ C$.

In einem $y-x-$Güterdiagramm dürfen sich deshalb Kurven gleichwertiger Güterbündel (sog. Indifferenzkurven, dazu später mehr) nicht schneiden.

C Reflexivität

Zwei identische Güterbündel *A* und *B* (*A* = *B*) werden gleich gut bewertet: *A* ~ *B*

Zusätzliche (!) **Annahmen** zu Präferenzordnung sind

D Stetigkeit

Beim Vergleich von Güterbündeln gibt es keine sprunghaften, sondern stetige Höherbewertungen. Für beliebige Güterbündel *A*, *B*, *C* und *D* gilt:

> Wenn $A \succ B$ und $B \succ C$, dann gibt es im Güterraum entlang der Verbindungslinie von *A* und *C* ein Güterbündel *D* mit $D \sim B$.

Im $y-x-$Diagramm (Abb. 1) existieren unendlich viele, in sich lückenlose Graphen gleichwertiger Güterbündel (Indifferenzkurven), deren Abstand zueinander unendlich klein ist.

E Nichtsättigung

Der Haushalt zieht stets ein Güterbündel *A* einem Güterbündel *B* vor, wenn *A* von mindestens einem Gut eine größere Menge als *B* enthält, aber von keinem Gut eine geringere Menge als *B*.

Nichtsättigung:

Mehr ist besser!

$A(x_A, y_A) \succ B(x_B, y_B)$, wenn $x_A = x_B$ und $y_A > y_B$

Im $y-x-$Güterdiagramm gilt für ein Güterbündel *A*, das rechts (oberhalb) von einem Güterbündel *B* liegt, stets $A \succ B$.

F Strenge Konvexität

Ein Haushalt zieht Güterbündel vor, die aus zwei indifferenten Güterbündeln gemischt sind. Für beliebige Güterbündel *A*, *B* und *C* gilt: Wenn $A \sim B$, dann gilt für jedes Güterbündel *C* entlang der Verbindungslinie von *A* und *B*: $C \succ A \sim B$.

strenge Konvexität:

Mischung ist besser!

formal: $C = [\alpha \cdot A + (1-\alpha) \cdot B] \succ A \sim B$ mit $A \neq B$ und $0 < \alpha < 1$

Im $y-x-$Güterdiagramm verlaufen die Kurven gleichwertiger Güterbündel (Indifferenzkurven) konvex zum Ursprung:

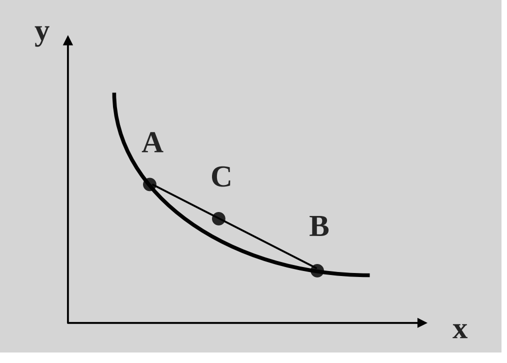


Abb. 1: Strenge Konvexität

alternativ:

Mit Hilfe der binären Ordnungsrelation „$\succsim$“ (*nicht schlechter als* bzw. *mindestens so gut wie*) lassen sich die Eigenschaften der Präferenzordnung auch wie folgt darstellen:

Axiome
- Vollständigkeit
- Transitivität
- Reflexivität

A **Vollständigkeit**: Für zwei beliebige Güterbündel A und B gilt entweder $A \succsim B$ oder $B \succsim A$ oder beides.

B **Transitivität**: Für je drei Güterbündel A, B, C gilt: Aus $A \succsim B$ und $B \succsim C$ folgt $A \succsim C$.

C **Reflexivität**: Für jedes $A = A$ gilt $A \succsim A$.

weitere Eigenschaften
- Stetigkeit
- Nichtsättigung
- strenge Konvexität

D **Stetigkeit**: siehe oben.

E **Nichtsättigung**: Aus $x^A \geq x^B$ und $y^A > y^B$ folgt $A \succ B$.

F **Strenge Konvexität**: siehe oben.

Lexikografische Präferenzordnung

Es gibt auch Präferenzordnungen, die nicht alle beschriebenen Eigenschaften simultan aufweisen. Als Beispiel einer solchen Präferenzordnung: Gegeben seien zwei Güterbündel $A(x_A, y_A)$ und $B(x_B, y_B)$. Der Haushalt präferiert A gegenüber B, wenn

Die lexikografische Präferenzordnung ist nicht stetig.

- entweder $x_A > x_B$
- oder $x_A = x_B$ und $y_A > y_B$ gilt.

In dieser Präferenzordnung existiert kein anderes Güterbündel C, das gleichwertig zu A ist. Trivialerweise gilt Indifferenz nur für $A = A$. Es gibt keine Indifferenzkurven, der lexikografischen Präferenzordnung fehlt die Eigenschaft der Stetigkeit.

Präferenzordnung und Nutzenfunktion

Wenn die Präferenzordnung die ersten vier Eigenschaften

- Vollständigkeit
- Transitivität
- Reflexivität
- Stetigkeit

aufweist, lässt sie sich mit einer – mathematisch formulierten – Nutzenfunktion U beschreiben. Die spezifische Form der Nutzenfunktion ist dabei unerheblich, solange gilt: Aus $A \succ B$ folgt

$U(A) > U(B)$. Es gibt also viele Nutzenfunktionen U^i und U^j, die eine bestimmte Präferenzordnung abbilden können, allerdings nur, wenn U^i eine **streng monoton steigende Transformation** von U^j (und umgekehrt) ist. Es muss für $U^i = F(U^j)$ mithin stets $dU^i / dU^j > 0$ erfüllt sein.[3]

Drei Beispiele verdeutlichen, was gemeint ist:

$U^i = x^2 \cdot y^2$ ist eine Transformation von $U^j = x \cdot y$, denn es gilt $U^i = (U^j)^2$. $U^i = x^2 \cdot y^2$ ist eine streng monoton **steigende** Transformation von $U^j = x \cdot y$, weil für beliebige Änderungen von x und y gilt: $dU^i / dU^j = 2 \cdot U^j > 0$.

$U^i = \frac{1}{x \cdot y}$ ist eine streng monoton **fallende** Transformation von $U^j = x \cdot y$, denn es gilt $U^i = (U^j)^{-1}$ sowie für beliebige Änderungen von x und y: $dU^i / dU^j = -(U^j)^{-2} < 0$.

$U^i = x^{2/3} \cdot y^{1/3}$ ist **keine** Transformation von $U^j = x \cdot y$, denn es lässt sich nicht $U^i = F(U^j)$ bilden. Alternativer Beweis durch Widerspruch: Für die Güterbündel $(x, y) = (2,1)$ und $(x, y) = (1,2)$ gilt $U^j(2,1) = U^j(1,2) = 2$, aber $U^i(2,1) = 2^{2/3} > U^i(1,2) = 2^{1/3}$.

Ableitungsregel:

$y = a \cdot x^n$

mit

$dy / dx = n \cdot a \cdot x^{n-1}$

Prüfen Sie:

$U^i = F(U^j)$

und

$dU^i / dU^j > 0$

Richtig oder falsch?

a) Die Nutzenfunktion $U = x$ widerspricht dem Axiom der Vollständigkeit.

b) Die Nutzenfunktion $U = x - y$ widerspricht der Annahme der Unersättlichkeit.

c) Die Nutzenfunktion $U = x + y$ widerspricht der Stetigkeitsannahme.

d) Die Nutzenfunktion $U = x \cdot y^2$ widerspricht der Annahme strenger Konvexität.

Übungsaufgabe 1

---

3 Wenn bei Änderung der Funktionsargumente U^j steigt (sinkt, konstant bleibt), muss auch U^i steigen (sinken, konstant bleiben).

2.2.2 Nutzenfunktion und Indifferenzkurve

x und y bestimmen U. Nicht umgekehrt!

Eine Nutzenfunktion $U = U(x, y)$ ist die formalisierte Darstellung der Präferenzen eines Haushaltes, sie stellt einen Zusammenhang her zwischen dem Nutzenniveau bzw. der Nutzenzahl U (abhängige Variable) und der Kombination der Gütermengen x und y (unabhängige Variablen). In der ordinalen Nutzentheorie [4] werden verschiedene Annahmen getroffen, damit die Nutzenfunktion in der mikroökonomischen Analyse verwendet werden kann. Ausgangspunkt einer solchen Nutzenfunktion ist die obige Präferenzordnung. Wie Sie sehen werden, besteht ein enger Zusammenhang zwischen den Annahmen für eine Nutzenfunktion und den Axiomen sowie den weiteren Eigenschaften der Präferenzordnung.

In diesem Abschnitt werden einige Begriffe eingeführt, deren Definition und ökonomische Bedeutung Sie sich aneignen sollten:

- Grenznutzen
- Indifferenzkurve
- Grenzrate der Substitution
- Substitutionselastizität

Grenznutzen

Grenznutzen ökonomisch

Mit zunehmendem Konsum eines Gutes nimmt auch der Nutzen zu. Der Grenznutzen (= Zusatznutzen, marginaler Nutzen) ist der Nutzen, den eine weitere (infinitesimal kleine) Gütereinheit zusätzlich stiftet. *Etwas anschaulicher*: Der Grenznutzen ist der Nutzen der zuletzt verbrauchten Gütereinheit.

Grenznutzen grafisch

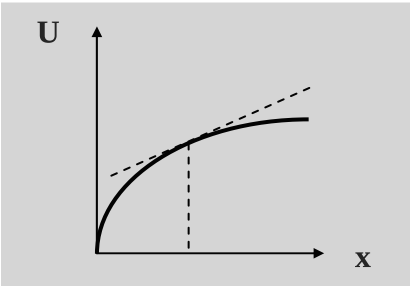


Abb. 2: Nutzenkurve 1

Die Steigung der Tangente an der Nutzenkurve im $U - x -$Diagramm ist stets positiv, die Kurve verläuft mithin streng monoton

[4] Der Zusammenhang zwischen Nutzenzahl und Güterkombination ist lediglich ordinal: Eine höhere (niedrigere) Zahl bedeutet ein höheres (niedrigeres) Nutzenniveau – mehr nicht! Bei der historisch älteren kardinalen Variante lassen sich aus dem Abstand zweier Nutzenzahlen zusätzliche Angaben zur Bedürfnisbefriedigung wie „doppelt so groß“, „um 20% höher“ etc. ableiten. Damit würden die Nutzenniveaus auch unter verschiedenen Haushalten vergleichbar.

steigend. Das korrespondiert mit der Eigenschaft der **Nichtsättigung** der Präferenzordnung.

Die erste partielle Ableitung der Nutzenfunktion nach einem Gut ist jeweils größer Null.

Grenznutzen

formal

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x > 0 \qquad \text{sowie} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = U_y > 0 .$$

formaler Hinweis:

Es handelt sich um unterschiedliche Schreibweisen für die Ableitung (den Grenznutzen). An der Notation $\frac{\partial U}{\partial x}$ können Sie aber vermutlich besser erkennen, dass die Ableitung besagt, um wie viele Einheiten sich der Nutzen ändert (∂U), wenn der Verbrauch des Gutes x um eine (infinitesimal kleine) Einheit steigt (∂x). Jeder Differentialquotient ist also eine Ursache-Wirkungs-Beziehung. ∂U = Wirkung, ∂x = Ursache

Differentialquotient:

Ursache „unten“

Wirkung „oben“

Wenn bei gegebenem (konstantem) x der Verbrauch des Gutes y steigt, steigt wegen $\partial U / \partial y > 0$ der Nutzen. Dies wirkt sich im $U - x -$ Diagramm durch eine Verlagerung der Nutzenkurve nach oben (also entlang der $U -$ Achse) aus. Man nennt y deshalb **Lageparameter** der Nutzenkurve. Machen Sie sich klar, dass in einem $U - y -$ Diagramm die Variable x Lageparameter ist.

y ist Lageparameter im U–x–Diagramm.

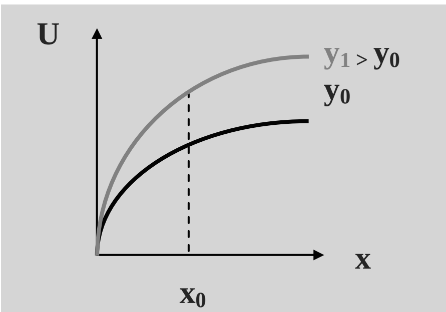


Abb. 3: Nutzenkurve 2

Änderung des Grenznutzens

Der Nutzenzuwachs, den eine zusätzliche Gütereinheit stiftet, ist um so geringer, je größer die verbrauchte Gütermenge bereits ist. Diese Annahme wird auch als **Gesetz vom abnehmenden Grenznutzen** oder als **1. GOSSENsches Gesetz** bezeichnet. [5]

Grenznutzenänderung

1. Gossensches Gesetz

[5] Diese übliche Annahme zur Änderung des Grenznutzens ist nicht konstitutiv für eine Nutzenfunktion! Es sind auch Nutzenfunktionen mit

Die Kurve der Nutzenfunktion ist streng konkav, also zur $x-$ Achse gestaucht. (*siehe* Abb. 2) Die zweite (partielle) Ableitung der Nutzenfunktion nach jedem Gut ist kleiner Null.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U_{xx} < 0 \qquad \text{sowie} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = U_{yy} < 0\,.$$

Übungsaufgabe 2

Richtig oder falsch?

a) Der Graph der Nutzenfunktion $U = x^{0,2} \cdot y^{1,2}$ verläuft im $U-x-$ und im $U-y-$Diagramm jeweils konkav steigend.

b) Für die Nutzenfunktion $U = x^{0,2} \cdot y^{0,8}$ ist mit jeweils steigendem Verbrauch der Grenznutzen für x abnehmend und für y zunehmend.

c) Die Grenznutzen der Nutzenfunktion $U = 2 \cdot x + 3 \cdot y$ sind konstant.

Indifferenzkurve

U ist Lageparameter im y–x–Diagramm.

Die Indifferenzkurve ist der Graph der Nutzenfunktion $U = U(x, y)$ im $y-x-$Diagramm (oder $x-y-$ Diagramm). Lageparameter ist der Nutzen U, entlang der Indifferenzkurve ist der Nutzen also konstant. Eine Indifferenzkurve ist mithin der geometrische Ort aller Güterbündel (im Güter– oder Konsumraum), die einem Haushalt denselben Nutzen stiften bzw. denen gegenüber ein Haushalt indifferent ist

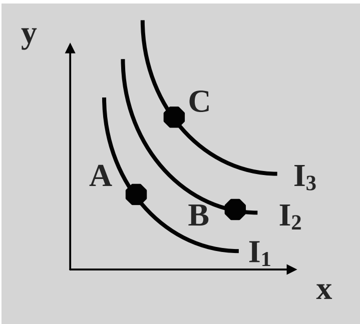


Abb. 4: Indifferenzkurven

---

konstantem oder sogar steigendem Grenznutzen möglich. Nutzenfunktionen, die sich in dieser Hinsicht unterscheiden, können dennoch dieselbe Präferenzordnung abbilden. Anders ausgedrückt: Damit U^i eine streng monoton steigende Transformation von U^j ist, muss nicht $\partial^2 U^i / \partial (U^j)^2 > 0$ gelten.

Wenn die Indifferenzkurven $I_1(I_2, I_3)$ alle Güterbündel mit dem Nutzenniveau $U_1(U_2, U_3)$ repräsentieren, dann gilt $U_1 < U_2 < U_3$ bzw. $A \prec B \prec C$. Weil auf einer Indifferenzkurve stets nur gleichwertige Güterbündel liegen, können sich Indifferenzkurven niemals schneiden. Das korrespondiert mit der Eigenschaft der **Transitivität** der Präferenzordnung. Im Güterraum existiert ein System unendlich vieler lückenloser Indifferenzkurven, deren Abstand zueinander unendlich klein ist. Das korrespondiert mit der **Vollständigkeitsannahme** und der **Stetigkeitseigenschaft** der Präferenzordnung.

Nutzenfunktion

Vollständigkeit, Transitivität, Stetigkeit

Je größer der Nutzen ist, um so weiter entfernt vom Ursprung liegt die Indifferenzkurve.

Die Steigung der Indifferenzkurve ergibt sich, indem die Nutzenfunktion nach der Ordinatenvariable y des Güterdiagramms aufgelöst, $y = y(x, U)$, und anschließend nach x abgeleitet wird. Für nicht–spezifische Nutzenfunktionen wie $U = U(x, y)$ ergibt sich die Steigung nur durch totales Differenzieren:

Spezifische Funktionen lassen sich partiell und total differenzieren.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy$$

Wegen der Nutzenkonstanz auf der Indifferenzkurve ($dU = 0$) folgt

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy$$ bzw. nach Umstellen die Steigung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y} < 0$$

Indifferenzkurve

Steigung

Grenzrate der Substitution (GRS)

Wenn man eine Indifferenzkurve wie in Abb. 4 von oben nach unten durchläuft, so wird sukzessive von Gut x mehr ($dx > 0$) und von Gut y weniger ($dy < 0$) konsumiert, ohne dass sich das Nutzenniveau ändert: Gut y wird bei konstantem Nutzen durch Gut x substituiert.

Die Grenzrate der Substitution des Gutes y durch Gut x, dy/dx, ist jene Menge von Gut y, auf die bei einer Erhöhung von Gut x um eine (infinitesimal kleine) Einheit verzichtet werden kann, um das Nutzenniveau konstant zu halten.[6] Die Grenzrate der Substitution

GRS

ökonomisch

[6] Die in y – Gütereinheiten (nicht in Geldeinheiten!) notierte Verzichtsbereitschaft des Haushaltes wird im Modul „Theorie der Marktwirt-

entspricht also dem Verhältnis, zu dem der Haushalt beide Güter ohne Nutzenänderung zu tauschen bereit ist:

GRS = Steigung der Indifferenzkurve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y} < 0$$ [7]

Bitte merken Sie sich:

Die **Grenzrate der Substitution** entspricht dem **negativen umgekehrten Grenznutzenverhältnis.**

Die Grenzrate der Substitution (GRS) ist formal die Steigung der Indifferenzkurve. Geometrisch kann die GRS als Steigung der Tangente an der Indifferenzkurve gemessen werden. Wenn die Indifferenzkurve (von unten) **streng konvex** verläuft, die beiden Güter also nur unvollkommen substituierbar sind, nimmt die Tangentensteigung, also die GRS mit zunehmenden *x* betragsmäßig (!) ab:

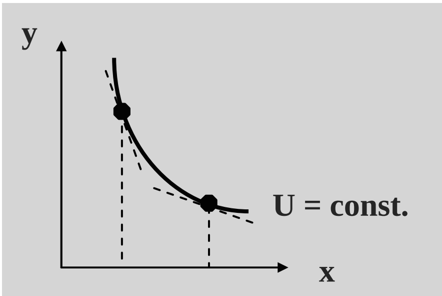


Abb. 5: Grenzrate der Substitution

Gesetz von der abnehmenden GRS

Dieser Verlauf entspricht dem **Gesetz von der abnehmenden Grenzrate der Substitution**. Es besagt, dass ein Haushalt mit zunehmender Menge von Gut *x* für jede zusätzliche Mengeneinheit von Gut *x* auf eine lediglich immer kleinere Menge von Gut *y* verzichten kann, um seinen Nutzen konstant zu halten. *Anders ausgedrückt*: Je mehr ein Haushalt bereits von Gut *x* konsumiert, desto geringer ist die Menge von Gut *y*, die bei gleich bleibendem Nutzenniveau durch eine zusätzliche Mengeneinheit von Gut *x* substituiert werden kann.

---

schaft“ der FernUniversität Hagen auch *marginale Zahlungsbereitschaft* genannt: Bei einer GRS von $dy/dx = -2$ ist der Haushalt bereit, für eine zusätzliche x – Einheit zwei y – Einheiten zu „zahlen“.

[7] Im Modul „Theorie der Marktwirtschaft“ der FernUniversität Hagen würde die GRS wie folgt notiert werden: $GRS(y,x) = -\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Bitte beachten Sie zudem, dass die GRS dort positiv notiert ist! Denken Sie bei der ökonomischen Interpretation dennoch stets daran, dass die Vorzeichen von Δy und Δx unterschiedlich sein müssen, weil *y* durch *x* substituiert wird (oder umgekehrt).

Das Gesetz von der abnehmenden Grenzrate der Substitution korrespondiert mit der Annahme der **Konvexität** der Präferenzordnung, wonach jede Mischung aus zwei gleichwertigen Güterbündeln stets vorgezogen wird. Bei zunehmenden Konsum von Gut x sinkt der Grenznutzen $\partial U / \partial x$ (wegen des Gesetzes vom abnehmenden Grenznutzen), bei abnehmenden Konsum von Gut y steigt $\partial U / \partial y$ (aus demselben Grund). Deshalb sinkt bei konstantem Nutzenniveau betragsmäßig (!) die GRS bei zunehmenden Konsum von Gut x. Dies ist der formale Nachweis für den konvexen Verlauf der Indifferenzkurve.

Nutzenfunktion

strenge Konvexität

Richtig oder falsch?

a) Die GRS der Nutzenfunktion $U = x \cdot y$ ist konstant.

b) Die GRS der Nutzenfunktion $U = x^2 \cdot y^2$ ist positiv.

c) Die Indifferenzkurve der Nutzenfunktion $U = 0{,}5 \cdot x + 0{,}5 \cdot y$ ist eine fallende Gerade.

Übungsaufgabe 3

Substitutionselastizität

Die Substitutionselastizität gibt das Verhältnis aus relativer Änderung der Gütermengenkombination y/x und der relativen Änderung der Grenzrate der Substitution dy/dx an. *Anschaulicher* (wenn auch ungenauer): Die Substitutionselastizität besagt, um wie viel Prozent das Gütermengenverhältnis y/x steigt, wenn die Grenzrate der Substitution um ein Prozent steigt.

Substitutionselastizität

ökonomisch

Die Substitutionselastizität entspricht dem Quotienten aus prozentualer Änderung des Güterverhältnisses y/x und prozentualer Änderung der Grenzrate der Substitution dy/dx:

allgemein zum Konzept der Elastizität siehe Abschnitt 2.2.5

$$\varepsilon_{sub}(y,x) = \frac{d(y/x):(y/x)}{d(dy/dx):(dy/dx)}$$

Substitutionselastizität

stets positiv

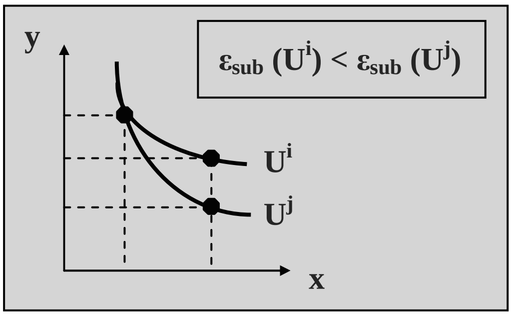


Abb. 6: Substitutionselastizität

Substitutionselastizität

Maß für die Substituierbarkeit der Güter

Je weniger gekrümmt die Indifferenzkurve verläuft, um so stärker ändert sich das Verhältnis der Gütermengen bei einer Änderung der Grenzrate der Substitution, um so größer ist der Wert der Substitutionselastizität.[8] Im Grenzfall perfekter Substituierbarkeit gilt stets $d(dy/dx)=0$ und deshalb hat die Substitutionselastizität den Wert Unendlich.[9]

2.2.3 Budgetrestriktion und Budgetgerade

Die durch Nutzenfunktion bzw. Indifferenzkurven beschriebenen Präferenzen eines Haushalts können in einer Marktwirtschaft selbstverständlich nur insoweit befriedigt werden, als sie durch das Konsumbudget (verfügbare Einkommen = Nettoeinkommen minus Ersparnis) gedeckt sind. Das Konsumbudget muss zudem für die geplanten Güterkäufe vollständig ausgeschöpft werden, damit ein Nutzenmaximum erreicht werden kann, denn: Jeder für Konsumausgaben geplante Euro, der nicht ausgegeben wurde, erhöht, indem er für den Kauf eines beliebigen Gutes eingesetzt wird, den Nutzen – also kann der Nutzen zuvor nicht maximal gewesen sein.

Das Konsumbudget muss ausgeschöpft sein.

Das Konsumbudget B ist ausgeschöpft, wenn es den tatsächlichen Konsumausgaben, mithin der Summe aus den mit den jeweiligen Preisen P_X und P_Y bewerteten Gütermengen x und y entspricht. Die sog. **Budgetgleichung** lautet:

Budgetgleichung

$$B = P_X \cdot x + P_Y \cdot y\,.$$ [10]

Die **Budgetgerade** ist der Graph der Budgetgleichung, der geometrische Ort aller Güterbündel im Konsumraum, die bei gegebenem Konsumbudget und bei gegebenen Güterpreisen maximal erreichbar (*weil*: finanzierbar) sind. Man nennt sie auch **Konsummöglichkeitsgrenze**. Sie begrenzt im **Güterraum** (dem gesamten $y-x-$Diagramm) die sog. **Konsummöglichkeitsmenge**.

---

8 Die abgebildeten Indifferenzkurven dürfen sich schneiden, weil sie zu zwei verschiedenen Nutzenfunktionen gehören! Können Sie erkennen, dass sich von links oben nach rechts unten die Grenzrate der Substitution (die Steigung!) für die zu U^i gehörende Indifferenzkurve stärker und das Verbrauchsmengenverhältnis weniger stark ändert, als dies für U^j der Fall ist!? Daraus folgt: $\varepsilon_{sub}(U^i) < \varepsilon_{sub}(U^j)$.

9 Die Nutzenfunktion $U = x + y$ führt zu linearen Indifferenzkurven, sie weist mithin vollkommene Substituierbarkeit der Güter auf: $\varepsilon_{sub} = \infty$. Bei vollständiger Komplementarität, *Beispiel*: $U = \min\{x, y\}$, also Nicht–Substituierbarkeit, gilt wegen $d(y/x) = 0$ übrigens $\varepsilon_{sub} = 0$.

10 Die Budget*restriktion*, $B \geq P_X \cdot x + P_Y \cdot y$, schließt mit „>" die Möglichkeit ein, dass die geplante Konsumsumme durch die tatsächlichen Konsumausgaben nicht ausgeschöpft wird.

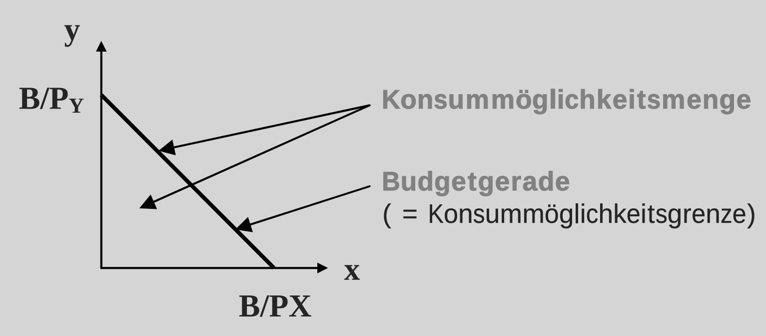


Abb. 7: Budgetgerade

Die Gleichung der zur Übertragung in das $y-x-$Diagramm geeigneten **Budgetgerade** (Steigungsform der Budgetgleichung) lautet $y=\frac{B}{P_Y}-\frac{P_X}{P_Y}\cdot x$. Die Achsenabschnitte lauten $y=\frac{B}{P_Y}$ (für $x=0$) sowie $x=\frac{B}{P_X}$ (für $y=0$). Die Steigung der Budgetgeraden entspricht der ersten Ableitung und ist gleich dem negativen (umgekehrtem) Preisverhältnis:

$y = B / P_Y$

maximale y-Menge

$x = B / P_X$

maximale x-Menge

Preisverhältnis

Steigung der Budgetgerade

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P_X}{P_Y}$$

Lageparameter im $y-x-$Diagramm sind P_X, P_Y und B.

Das **Preisverhältnis** gibt an, auf wie viele $y-$Gütereinheiten der Haushalt verzichten **muss**, wenn er bei ausgeschöpftem Budget eine $x-$Einheit zusätzlich kaufen möchte.

Bitte nicht verwechseln:

Die Grenzrate der Substitution (GRS) gibt an, auf wie viele $y-$Einheiten der Haushalt zu verzichten *bereit* ist, wenn er bei unverändertem Nutzen eine $x-$Einheit zusätzlich bekommen kann.

Lage der Budgetgerade

Änderungen der Lageparameter P_X, P_Y und B bewirken eine Verschiebung der Budgetgerade. Kombinationen (B sinkt und P_X steigt u. ä.) sind möglich. Die proportionale Änderung (zum Beispiel mit dem Faktor α) aller drei Lageparameter lässt die Lage der Budgetgerade jedoch unverändert: $\alpha\cdot B=(\alpha\cdot P_X)\cdot x+(\alpha\cdot P_Y)\cdot y$ bzw. nach Kürzen $B=P_X\cdot x+P_Y\cdot y$

Die Budgetgerade verschiebt sich parallel bei einer Budgetänderung

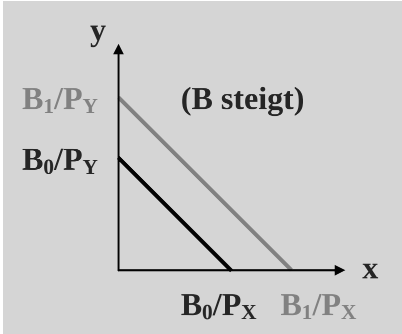


Abb. 8: Budgetgerade nach Budgeterhöhung

Die Budgetgerade dreht sich um den Schnittpunkt mit der y-Achse, wenn sich der Preis für Gut x ändert.

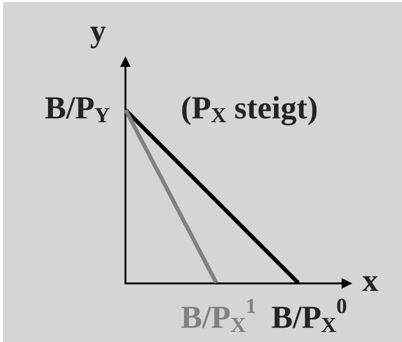


Abb. 9: Budgetgerade nach Preiserhöhung für Gut *x*

Die Budgetgerade dreht sich um den Schnittpunkt mit der x-Achse, wenn sich der Preis für Gut y ändert.

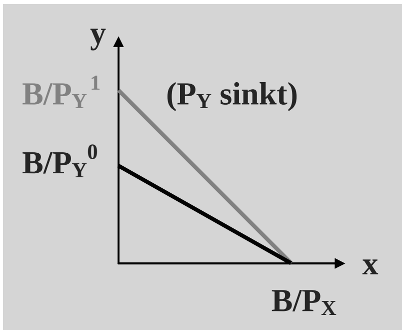


Abb. 10: Budgetgerade nach Preissenkung für Gut *y*

Übungsaufgabe 4

Richtig oder falsch?

a) Wenn P_X sinkt, dreht sich die Budgetgerade um ihren Schnittpunkt mit der y – Achse vom Ursprung weg.

b) Wenn P_Y steigt, dreht sich die Budgetgerade um ihren Schnittpunkt mit der x – Achse zum Ursprung hin.

c) Die Erhöhung der Einkommensteuer verlagert die Budgetgerade parallel nach innen.

d) Wenn das Einkommen um 10% und beide Güterpreise um 5% steigen, bleibt die Budgetgerade unverändert.

Textauszug Ende

Textauszug

2.7 Lösungen zu den Klausuraufgaben

Lösung der Aufgabe 1 aus 9 / 17

B und **D** sind richtig.

Zu **A**: Die **Gleichung** der Budgetgerade lautet allgemein $B = P_1 \cdot X_1 + P_2 \cdot X_2$, hier also $50 = 4 \cdot X_1 + X_2$. [**A** ist **falsch**.]

Zu **B**: Die **Steigung** der Budgetgerade im $X_2 - X_1 -$Diagramm lautet $\frac{dX_2}{dX_1} = -\frac{P_1}{P_2} = -4$, ermittelt als Ableitung aus der nach X_2 umgestellten Budgetgleichung, $X_2 = 50 - 4 \cdot X_1$, nach X_1. [**B** ist **richtig**.]

Zu **C**: Einkommenserhöhungen mindern die Konsummöglichkeitsmenge (Verschiebung zum Ursprung) bei konstantem Preisverhältnis (Parallelverschiebung). [**C** ist **falsch**.]

Zu **D**: Wenn sich P_2 verdoppelt, verringert sich die maximale mögliche Konsummenge von X_2 auf die Hälfte. Die maximal mögliche $X_1 -$Menge bleibt dabei konstant. [**D** ist **richtig**.]

Zu **E**: $\frac{dX_2}{dX_1} = -\frac{P_1}{P_2}$ hat die Dimension $\frac{Euro / ME_{Gut\,1}}{Euro / ME_{Gut\,2}} = \frac{ME_{Gut\,2}}{ME_{Gut\,1}}$, für $\frac{P_2}{P_1}$ gilt $\frac{ME_{Gut\,1}}{ME_{Gut\,2}}$.

Eine Einheit des Gutes 1 wird gegen $\frac{P_1}{P_2} = 4$ Einheiten des Gutes 2 getauscht. [**E** ist **falsch**.]

Lösung der Aufgabe 2 aus 9 / 17

A und **D** sind richtig.

Zu **A**: Die Präferenzordnung ist reflexiv, denn identische Güterbündel werden gleich gut bewertet. Sie ist vollständig, denn alle Güterkombinationen können bewertet und miteinander verglichen werden. Sie ist transitiv, denn es gibt keine Widersprüche in der Rangordnung der Güterbündel. [**A** ist **richtig**.]

Zu **B** und **C**: Die Nutzenfunktion $U = \max\{X_1, X_2\}$ bedeutet, dass die höhere Einzelmenge des Güterbündels unabhängig von der Menge des anderen Gutes den Nutzen bestimmt. Für $X_2 > X_1$ gilt also $U = X_2$, für $X_1 > X_2$ gilt $U = X_1$ und für $X_1 = X_2$ gilt $U = X_1 = X_2$. Die Indifferenzkurven haben deshalb in einem $X_2 - X_1 -$Diagramm ausgehend von jedem Punkt auf der Winkelhalbierenden ($X_1 = X_2$) einen senkrecht nach unten (für $X_1 > X_2$) sowie einen waagerecht nach links verlaufenden Ast (für $X_2 > X_1$). [**B** und **C** sind **falsch**.]

Zu **D**: Die Präferenzordnung ist vollständig, denn alle Güterkombinationen können bewertet und miteinander verglichen werden. [**D** ist **richtig**.] Evtl. wichtig für kommende Aufgaben: Sie ist auch transitiv, denn alle Punkte oberhalb der Winkelhalbierenden im $X_2 - X_1 -$Diagramm befinden sich (wegen $X_2 > X_1$) auf je einer der senkrecht und parallel zueinander verlaufenden Indifferenzkurven. Für Punkte auf und unterhalb der Winkelhalbierenden gibt es keine Indifferenzkurven, denn hier gilt $X_1 \geq X_2$ und somit $U = 0$. Die Eigenschaft Nicht–Sättigung ist für $X_1 \geq X_2$ nicht gegeben.

Zu **E**: Offensichtlich ist der Verbrauch des Gutes 1 irrelevant für den Nutzen des Haushaltes. In einem Güter–Diagramm verlaufen die unendlich vielen Indifferenzkurven deshalb parallel zur X_1 – Achse. [**E** ist **falsch**.]

Lösung der Aufgabe 3 aus 9/17

C und **D** sind richtig.

Zu **A**: Ein Entscheider mit der Nutzenfunktion $U = U(X)$ mit $\frac{dU}{dX} > 0$ und $\frac{d^2U}{dX^2} < 0$ $\left(\frac{d^2U}{dX^2} > 0, \frac{d^2U}{dX^2} = 0\right)$ ist risikoscheu (risikofreudig , risikoneutral). [**A** ist **falsch**.]

Zu **B** und **C**: Der Entscheider ist indifferent zwischen einem sicheren Ertrag und der Handlungsalternative mit unsicherem Ertrag, wenn die sich daraus ergebenden Nutzenwerte identisch sind. Dieser sichere Ertrag wird **Sicherheitsäquivalent** X_S genannt. Für den erwarteten Nutzen gilt $E[U(X)] = 0{,}5 \cdot 10^2 \cdot \sqrt{1} + 0{,}5 \cdot 10^2 \cdot \sqrt{4} = 150$. Da für den Nutzen des Sicherheitsäquivalents derselbe Nutzen gelten muss, folgt $U(X_S) = 150 = 10^2 \cdot \sqrt{X_S}$ bzw. $1{,}5 = \sqrt{X_S}$ bzw. $X_S = 2{,}25$. [**B** ist **falsch**., **C** ist **richtig**.]

Zu **D**: Die Differenz aus Erwartungswert und Sicherheitsäquivalent wird **Risikoprämie** *R* genannt. Sie gibt den Betrag an, den der Entscheider für die sichere Alternative zu zahlen bereit wäre. Für einen risikoscheuen (risikofreudigen, risikoneutralen) Entscheider gilt $R > 0$ ($R < 0$, $R = 0$). [**D** ist **richtig**.]

Zu **E**: Der (in der Fibel nicht besprochene) **Arrow–Pratt–Koeffizient** ist ein quantifizierbares und damit über die Verwendung der Begriffe Risikoscheu, Risikoneutralität und Risikofreude hinaus gehendes Maß für die Risikoaversion. Es ist mit $A(X) = -\frac{d^2U/dX^2}{dU/dX}$ definiert. Für $U(X) = 10^2 \cdot \sqrt{X}$ gilt also $A = -\frac{-0{,}25 \cdot 10^2 \cdot X^{-1{,}5}}{0{,}5 \cdot 10^2 \cdot X^{-0{,}5}} = 0{,}5 \cdot X^{-1}$. [**E** ist **falsch**.]

Lösung der Aufgabe 4 aus 9/17

A, **B**, **C** und **E** sind richtig.

Die **Nachfragefunktionen** ergeben sich aus Nutzenmaximierungsbedingung und Budgetgleichung. Die Bedingung für ein Nutzenmaximum (Grenznutzenverhältnis gleich Preisverhältnis) lautet hier: $\left(\frac{\partial U/\partial X_1}{\partial U/\partial X_2}=\right)\frac{X_2}{X_1}=\frac{P_1}{P_2}$. Auflösen nach $X_2=\frac{P_1}{P_2}\cdot X_1$ und Einsetzen in $P_1\cdot X_1+P_2\cdot X_2=B$ bringt $P_1\cdot X_1+P_2\cdot\frac{P_1}{P_2}\cdot X_1=B$ bzw. $2\cdot P_1\cdot X_1=B$ bzw. die Nachfragefunktion $X_1=\frac{B}{2\cdot P_1}$. Einsetzen in $X_2=\frac{P_1}{P_2}\cdot X_1$ bringt mit $X_2=\frac{P_1}{P_2}\cdot\frac{B_2}{2\cdot P_1}=\frac{B}{2\cdot P_2}$ die Nachfragefunktion für das Gut 2. [**D** ist **falsch**.] Einsetzen der Zahlen ergibt $X_1=\frac{B}{2\cdot P_1}=\frac{20}{2\cdot 1}=10$ und $X_2=\frac{B}{2\cdot P_2}=\frac{20}{2\cdot 2}=5$. [**A** ist **richtig**.]

Einsetzen von $\tilde{P}_1=5$ in $X_1=\frac{B}{2\cdot P_1}$ bringt $\tilde{X}_1=2$. [**B** und **E** sind **richtig**.]

Für die Ausgaben gilt $P_1\cdot X_1=P_1\cdot\frac{B}{2\cdot P_1}=\frac{B}{2}$. [**C** ist **richtig**.]

Lösung der Aufgabe 5 aus 9/17

B und **E** sind richtig.

Für das Einkommen gilt $Y=l\cdot L=l\cdot(24-F)$ bzw. $Y+l\cdot F=24\cdot l$. [**A** ist **falsch**, **B** ist **richtig**.] Einsetzen in die Nutzenfunktion, $U=l\cdot(24-F)\cdot F^2=l\cdot 24\cdot F^2-l\cdot F^3$, und Nullsetzen der Ableitung nach *F*, $dU/dF=l\cdot 48\cdot F-3\cdot l\cdot F^2=0$, bringt nach Kürzen mit $3\cdot l\cdot F$ die lohnunabhängige Freizeitnachfragefunktion $F=16$ bzw. die lohnunabhängige Arbeitsangebotsfunktion $L=24-F=8$. [**C** und **D** sind **falsch**, **E** ist **richtig**.]

Textauszug

Ende

Textauszug

5 Unvollständige Konkurrenz

Die folgenden Marktformen unter unvollständiger Konkurrenz sollen *hier* – abgestellt auf die Anbieterseite – unterschieden werden:

	Zahl der Anbieter	Güterart
Monopol	einer	homogen
Oligopol	wenige große	homogen oder heterogen
Monopolistische Konkurrenz	viele	heterogen

Zum Oligopol wird *hier* nur die Sonderform des **Kartells** besprochen, bei dem sich die Anbieter zwecks gemeinsamer Gewinnmaximierung wie ein Monopolist verhalten.

Bei der Analyse wird stets unterstellt, dass die Nachfrageseite aus vielen kleinen Akteuren besteht, die jeder für sich keinen Einfluss auf den Marktpreis haben, mithin Mengenanpasser sind.

Einzelner Nachfrager ist Mengenanpasser.

5.1 Monopol: Einführung

Der Monopolist ist der einzige Anbieter am Markt. Er sieht sich anders als der *einzelne* Anbieter auf einem *Konkurrenzmarkt*, nicht einer unendlich preiselastischen Nachfrage sondern einer *preiselastischen Nachfrage* gegenüber. Bei einem Anbietermonopol können die Nachfrager bei einer individuellen Preiserhöhung nicht auf die Güter anderer Anbieter ausweichen, sondern lediglich ihre nachgefragte Menge reduzieren.

Unterschied zum Konkurrenzanbieter

	einzelner Konkurrenzanbieter	Monopolist
Marktstellung	einer von vielen	allein
Preiselastizität der Nachfrage	unendlich elastisch	elastisch
Marktpreis	gegeben	abhängig von der Nachfrage

Der Monopolist kann von daher unter Berücksichtigung seiner Kostensituation

- entweder den **Preis festsetzen** und dann die maximale Menge, die die Nachfrager zu kaufen bereit sind, produzieren,
- oder die **Menge festsetzen** und dann den maximalen Preis verlangen, den die Nachfrager für diese Menge zu zahlen bereit sind.

Diese Preis–Mengen–Kombination ergibt sich deshalb in Abhängigkeit von der Markt–Nachfragefunktion bzw. der Preiselastizität der Nachfrage. Bei seiner Angebotsentscheidung geht der Monopolist von einer (annahmegemäß korrekten) inversen Nachfragefunktion aus, der sog. **Preis–Absatz–Funktion**:

allgemein: $P = P(X) \qquad \text{mit} \qquad \frac{dP}{dX} < 0$

Durchschnittserlös = P

Die Preis–Absatz–Funktion ist aus Sicht des Monopolisten nichts Anderes als seine Durchschnittserlösfunktion. Diese wird in der Monopoltheorie oft wie folgt angegeben

Preis–Absatz–Funktion

spezifiziert: $P = a - b \cdot X \qquad \text{mit} \qquad a, b > 0$

Neben seiner Kostensituation spielt für den gewinnmaximierenden Monopolisten die Erlösseite eine wichtige Rolle. Der Erlös E ist die mit dem Güterpreis bewertete Absatzmenge X. Die **Erlösfunktion** lautet unter Berücksichtigung der Preis–Absatz–Funktion

allgemein: $E = P(X) \cdot X$

spezifiziert: $E = (a - b \cdot X) \cdot X = a \cdot X - b \cdot X^2$

Die Erlösfunktion enthält die Preis–Absatz–Funktion und nicht den Preis, weil die Preissetzung des Monopolisten abhängig von der geplanten Absatzmenge X ist.

Die **Grenzerlösfunktion** GE gibt an, um wie viele (Geld–) Einheiten der Erlös bei einer marginalen Absatzerhöhung steigt. Sie lautet

Produktregel:

$(f \bullet g)' = f' \bullet g + f \bullet g'$

allgemein: $GE = \left(\frac{dE}{dX} =\right) P(X) + \frac{dP(X)}{dX} \cdot X$

Grenzerlösfunktion

spezifiziert: $GE = \left(\frac{dE}{dX} =\right) a - 2 \cdot b \cdot X$

Hinweis: Im Folgenden wird stets P statt $P(X)$ notiert.

Unter Berücksichtigung **der Preiselastizität der Nachfrage** $\varepsilon_{X,P} = \frac{dX}{dP} \cdot \frac{P}{X} < 0$ kann der Grenzerlös des Monopolisten auch wie folgt formuliert werden:

Amoroso–Robinson–Relation

$$GE = P + \frac{dP}{dX} \cdot X = P \cdot \left(1 + \frac{dP}{dX} \cdot \frac{X}{P}\right) = P \cdot \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{X,P}}\right)$$

Bei dieser Formulierung handelt es sich um die sog. **Amoroso–Robinson–Relation**.

An der Preis–Absatz–Funktion, der Grenzerlösfunktion bzw. der Amoroso–Robinson–Relation können Sie Folgendes erkennen:

Durchschnittserlös (P) > Grenzerlös

- Der Marktpreis liegt stets über dem Grenzerlös: $P > GE$.[84]
- Der Monopolist produziert maximal bis $X = a/2b$, denn bei dieser Angebotsmenge ist der Grenzerlös gleich Null. Bei jeder Angebotsmenge $X > a/2b$ ist der Grenzerlös negativ.
- Die maximale Nachfragemenge ist $X = a/b$ (für $P = 0$).
- Die Steigung der Grenzerlösfunktion ist betragsmäßig doppelt so groß wie die Steigung der Preis–Absatz–Funktion. [Sehen Sie, wie dieser Umstand mit den Aussagen 2 und 3 zusammenhängt?][85]
- Für $GE > 0$ gilt $|\varepsilon_{X,P}| > 1$,
  für $GE = 0$ gilt $|\varepsilon_{X,P}| = 1$,
  für $GE < 0$ gilt $|\varepsilon_{X,P}| < 1$.[86]

Angebot nur, wenn GE > 0 bzw. $|\varepsilon_{X,P}| > 1$

Für gewinnmaximierende Monopolisten ist also lediglich der Bereich $GE > 0$ bzw. wegen $|\varepsilon_{X,P}| > 1$ der **elastische Bereich** der Nachfrage **relevant**.

Erlös maximal, wenn Grenzerlös = 0

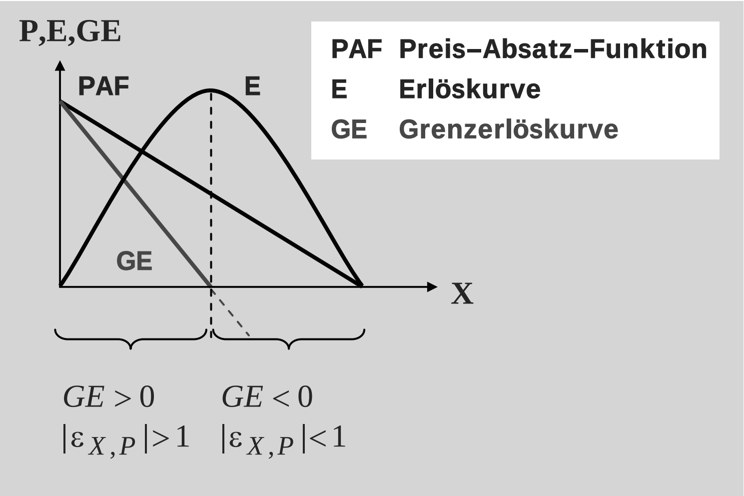


Abb. 79: Erlös und Grenzerlös im Monopol

---

84 $P > P \cdot \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{X,P}}\right)$ wegen $\varepsilon_{X,P} < 0$

85 $d(GE)/dX = -2 \cdot b$ bzw. $dP/dX = -b$

86 $GE = P \cdot \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{X,P}}\right) > 0$, wenn $1 + \frac{1}{\varepsilon_{X,P}} > 0$ bzw. $\frac{1}{\varepsilon_{X,P}} > -1$ bzw. $\varepsilon_{X,P} < -1$ bzw. $\left|\varepsilon_{X,P}\right| > 1$.

Darum liegt der **Grenzerlös** stets **unter** dem **Preis**: Wenn der Monopolist seine Angebotsmenge um eine Einheit erhöht, steigt sein Erlös um den Preis dieser zusätzlichen Einheit, um P. Im Gegensatz zum Konkurrenzanbieter (für den ist der Preis gegeben) hat die Mengendisposition eines Monopolisten stets Auswirkungen auf den Preis. Bei einer Angebotserhöhung um eine Einheit sind die Konsumenten nur zu einem niedrigeren Preis als zuvor bereit, ihre Nachfragemenge zu erhöhen. Um die zusätzliche Einheit auch verkaufen zu können, muss der Monopolist den Preis um dP/dX senken, was sich selbstverständlich auf die gesamte Angebotsmenge auswirkt. $(dP/dX)\cdot X < 0$ ist mithin die negative Komponente des Grenzerlöses. In der Summe ergibt sich

$$GE = P + (dP/dX)\cdot X < P \qquad [\text{wegen} \quad dP/dX < 0]$$

5.2 Monopolgleichgewicht

Die Existenz und das Zustandekommen eines Gleichgewichts auf einem Monopolmarkt kann – ähnlich wie bei vollständiger Konkurrenz – unabhängig von der zeitlichen Perspektive analysiert werden.

Statische Analyse

Marktgleichgewicht
= Gewinnmaximum

Es gibt keine Angebotskurve.

Auf dem Monopolmarkt gibt es lediglich einen Anbieter. Deshalb ist das Marktgleichgewicht mit dem Firmengleichgewicht (also dem Gewinnmaximum) des Monopolisten identisch. Die Marktnachfrage ist durch die **Preis–Absatz–Funktion** gegeben. Das Marktangebot ist genau jene Preis–Mengen–Kombination, für die der Gewinn des Monopolisten maximal wird. Das Angebot besteht also lediglich aus einem Angebots*punkt*, dem Marktgleichgewicht.

allgemein: Die **Gewinnmaximierungsaufgabe** lautet

$$\max!\, G = P\cdot X - K \qquad \text{u. d. N.} \qquad P = P(X) \qquad K = K(X) \;\; \text{bzw.}$$

$$\max\, G = \underset{[\mathit{Erlös}]}{P(X)\cdot X} \; - \; \underset{[\mathit{Kosten}]}{K(X)}$$

Die **notwendige Bedingung** für ein Gewinnmaximum lautet:

Produktregel:
$(f \bullet g)' = f' \bullet g + f \bullet g'$

$$\frac{dG}{dX} = \underset{[\mathit{Grenzerlös}]}{P + \frac{dP}{dX}\cdot X} \; - \; \underset{[\mathit{Grenzkosten}]}{\frac{dK}{dX}} \overset{!}{=} 0$$

Im Firmen– bzw. **Monopolgleichgewicht** gilt also

$$P + \frac{dP}{dX}X = \frac{dK}{dX} \qquad \text{bzw.} \qquad P\cdot\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{X,P}}\right) = \frac{dK}{dX}$$

Bitte merken Sie sich:

Grenzerlös gleich Grenzkosten

notwendige Bedingung

Die **hinreichende Bedingung** für ein Gewinnmaximum lautet:[87]

Bitte merken Sie sich:

Die Steigung der Grenzerlöskurve ist kleiner als die Steigung der Grenzkostenkurve.

hinreichende Bedingung

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn im Schnittpunkt von Grenzerlös– und Grenzkostenkurve die Grenzerlöskurve steiler verläuft.

Damit nicht lediglich ein Verlustminimum, sondern tatsächlich ein Gewinn erzielt wird, muss darüber hinaus für den **Monopolpreis** gelten, dass er kurzfristig die variablen **Stückkosten** bzw. langfristig die gesamten Stückkosten **deckt**.

Der gewinnmaximierende Monopolist richtet sein Angebot – wie ein Konkurrenzanbieter – an der **Grenzerlös=Grenzkosten–Regel** aus. Abhängig von seinen (Grenz–) Kosten handelt es sich dabei stets um *eine* bestimmte Menge, die **Monopolmenge** X^M, die gemäß der Preis–Absatz–Funktion mit *einem* bestimmten Preis, dem **Monopolpreis** P^M, korrespondiert.[88] Diese gewinnmaximale Preis–Mengen–Kombination ist der sog. **Cournot'sche Punkt**.[89] Im Unterschied zum Markt unter vollständiger Konkurrenz liegt der Preis (den der Monopolist verlangen kann bzw. den die Nachfrager zu zahlen bereit sind) stets über dem Grenzerlös (bzw. den Grenzkosten). Der Monopolist erwirtschaftet in der Regel positiven Gewinn, vorausgesetzt, er produziert im Bereich positiver Grenzerlöse und der Preis liegt über den Durchschnittskosten. Selbst wenn der Monopolist – zufällig – im Betriebsoptimum, also zu minimalen Durchschnittskosten produziert, erzielt er Gewinn, weil der Preis stets über dem Grenzerlös liegt.

Cournot'scher Punkt

X^M-P^M-Kombination

Für die grafische Darstellung des Gleichgewichts wird in den Abb. 80 und 81 um Grenz– und Durchschnittskostenkurven erweitert:[90]

---

87 Die zweite Ableitung der Gewinnfunktion, die Differenz aus Grenzerlösänderung und Grenzkostenänderung, muss kleiner Null sein. Dies ist relevant, wenn eine (zunächst) fallende Grenzkostenkurve und die Grenzerlöskurve zwei Schnittpunkte aufweisen.

88 Wenn der Monopolist seine gewinnmaximale Menge ermittelt hat, kann er den Preis, den die Nachfrager für diese Menge zu zahlen bereit sind, an seiner Preis–Absatz–Funktion „ablesen".

89 Augustin Cournot ist der Begründer der Monopoltheorie.

90 An der Ordinate ist € verzeichnet, weil alle Größen (*P*, *GE*, *GK*, *DK*) in Geldeinheiten pro Mengeneinheit notiert sind.

Gleichgewicht bei ertragsgesetzlichem Kostenverlauf

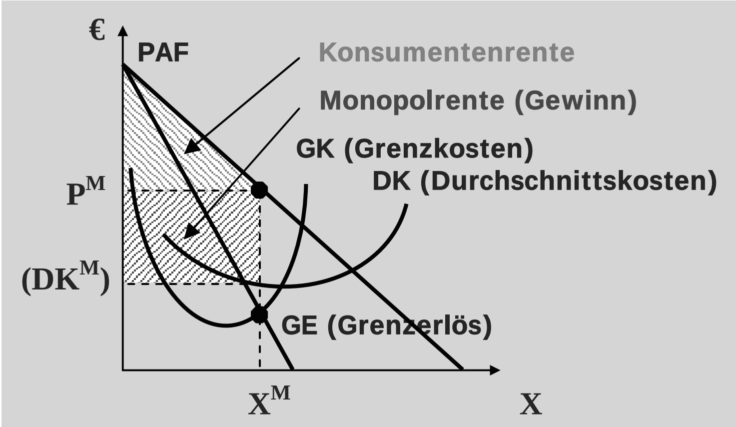


Abb. 80: Monopolgleichgewicht 1

Der **Cournot'sche Punkt** (X^M, P^M) wird durch die Menge (Abszisse) im Schnittpunkt von Grenzerlös und Grenzkostenkurve und den dazugehörigen, auf der Preis–Absatz–Funktion liegenden Preis (Ordinate) bestimmt. Zudem sind Konsumentenrente und **Monopolrente** (Produzentenrente, **Gewinn**) für unterschiedliche Grenzkostenverläufe (ertragsgesetzlich in Abb. 80, linear in Abb. 81) markiert. Die Monopolrente bzw. der Gewinn ergeben sich als Produkt aus Stückgewinn (Monopolpreis minus Durchschnittskosten) und Monopolmenge.

Textauszug

Ende

6 Mathehilfen für die Volkswirtschaftslehre

Textauszug

6.1 Ableitungen

Die Ableitung der allgemeinen Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x ist

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \qquad \text{oder} \qquad f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

In dieser Fibel wird der Ausdruck dy/dx statt f '(x) verwendet.

Die 1. Ableitung einer spezifizierten Funktion $y = a \cdot x^n$ lautet

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot a \cdot x^{n-1}.$$

Ableitungsregel

Die 1. Ableitung besagt, wie sich der Funktionswert y ändert, wenn sich das Argument x marginal (um eine unendlich kleine Einheit) erhöht. In der Ökonomik können Sie darunter stets eine **Ursache–Wirkung–Beziehung** verstehen.

Ursache „unten“: dx

Wirkung „oben: dy

Beispiel:

$\frac{dU}{dx}$ gibt an, um wie viele Einheiten sich der Nutzen U bei einer marginalen Erhöhung des x – Konsums ändert.

Dafür gibt es drei Möglichkeiten:

- $\frac{dU}{dx} > 0$. Der Nutzen U steigt, wenn x marginal steigt. *Oder*: Der Nutzen U sinkt, wenn x marginal sinkt.
- $\frac{dU}{dx} < 0$. Der Nutzen U sinkt, wenn x marginal steigt. *Oder*: Der Nutzen U steigt, wenn x marginal sinkt.
- $\frac{dU}{dx} = 0$. Der Nutzen U bleibt unverändert, wenn x marginal steigt (oder sinkt)

Differentialquotient > 0

Ursache und Wirkung sind gleich gerichtet.

Differentialquotient < 0

Ursache und Wirkung sind gegenläufig.

Differentialquotient = 0

Keine Ursache–Wirkung–Beziehung

Die 2. Ableitung ist die 1. Ableitung der 1. Ableitung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (n-1) \cdot n \cdot a \cdot x^{n-2}$$

Die 2. Ableitung besagt, wie sich die 1. Ableitung dy/dx ändert, wenn sich das Argument x marginal (um eine unendlich kleine Einheit) erhöht. Allgemein: Die n – te Ableitung besagt, wie sich die $(n-1)$ – te Ableitung ändert.

Unterscheiden Sie bitte:

- $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$ Die 1. Ableitung wird mit zunehmendem x größer.

  Die Funktion bzw. der Graph im $y-x-$Diagramm sind **streng konvex**. Beispiel: Abb. 22 auf Seite 56

- $\frac{d^2 y}{dx^2} < 0$ Die 1. Ableitung wird mit zunehmendem x kleiner.

  Die Funktion bzw. der Graph im $y-x-$Diagramm sind **streng konkav**. Beispiel: Abb. 21 auf Seite 55

- $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ Die 1. Ableitung bleibt mit zunehmendem x konstant.

  Die Funktion bzw. der Graph im $y-x-$Diagramm sind **linear**. Beispiel: Abb. 23 auf Seite 57

Notieren Sie „∂" statt „d" für eine partielle Ableitung,

wenn die Funktion mehr als 1 Argument enthält.

Rechenbeispiel:

Die Nutzenfunktion $U = 100 \cdot x_1^{0,3} \cdot x_2^{0,7}$ wird wie folgt abgeleitet:

1. Ableitung nach x_1: $\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0{,}3 \cdot 100 \cdot x_1^{-0,7} \cdot x_2^{0,7}$

1. Ableitung nach x_2: $\frac{\partial U}{\partial x_2} = 0{,}7 \cdot 100 \cdot x_1^{0,3} \cdot x_2^{-0,3}$

2. Ableitung nach x_1: $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = -0{,}21 \cdot 100 \cdot x_1^{-1,7} \cdot x_2^{0,7}$

2. Ableitung nach x_2: $\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = -0{,}21 \cdot 100 \cdot x_1^{0,3} \cdot x_2^{-1,3}$

Kreuzableitung nach x_2: $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = 0{,}21 \cdot 100 \cdot x_1^{-0,7} \cdot x_2^{-0,3}$

Kreuzableitung nach x_1: $\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} = 0{,}21 \cdot 100 \cdot x_1^{-0,7} \cdot x_2^{-0,3}$

Gelegentlich müssen je nach Funktionsform folgende **Ableitungsregeln** beachtet werden:

	Funktion	Ableitungsregel
Produktregel	$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
Kettenregel	$f[g(x)]$	$f'[g(x)]\cdot g'(x)$

Beispiel für die Produktregel:

$$E = p(x)\cdot x \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dx} = \frac{dp(x)}{dx}\cdot x + p(x)$$

Erlösfunktion aus der Monopoltheorie

Beispiel für die Quotientenregel:

$$Q = \frac{L^2\cdot C^2}{L^3+C^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{2\cdot L\cdot C^2\cdot(L^3+C^3)-3\cdot L^2\cdot L^2\cdot C^2}{(L^3+C^3)^2}$$

Sato–Produktions-funktion

Beispiel für die Kettenregel:

$$Q = (L^{-0,5}+C^{-0,5})^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial C} = \underbrace{-2\cdot(L^{-0,5}+C^{-0,5})^{-3}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{(-0,5)\cdot C^{-1,5}}_{\text{innere Ableitung}}$$

CES–Produktions-funktion

6.2 Totales Differenzieren

Wenn $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ die Ableitung der Funktion $f(x,y,z)$ an der Stelle x ist, so ist die **Veränderung des Funktionswertes** $df(x,y,z)$ an der Stelle x für eine **marginale Änderung** von x (näherungsweise) $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\cdot dx$. Dabei steht dx für eine Änderung von x. $df(x,y,z)$ nennt man das **Differential** der Funktion $f(x,y,z)$ an der Stelle x, daher auch der Ausdruck **Differentialquotient** für $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$. Hat eine Funktion – wie $f(x,y,z)$ – mehr als eine Variable, so ist das **totale Differential** nichts anderes als die Summe der (partiellen) Differentiale:

Regel: Bilden Sie für jede Variable (x) das Produkt aus Ableitung und Änderungsgröße:

(∂f/∂x) • dx

Textauszug

Ende